Einhüllende

a) Es sei $u = u(\cdot, a)$, $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ eine einparametrige Lösungsschar der Differentialgleichung

$$F(\cdot, u, \nabla u) = 0.$$

Ferne existiere die Einhüllende $z = w(x)$ der einparametrigen Flächenschar $M_a = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid z = u(x, a), a \in A\}$ mit einer C^1-Funktion w. Zeigen Sie, dass w wieder eine Lösung der Differentialgleichung ist. Die Einhüllende heißt dann auch *singuläres Integral* der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie das singuläre Integral der Differentialgleichung

$$u^2 \left(1 + |\nabla u|^2\right) = 1$$

aus der Lösungsschar

$$u(x, a) = \pm \left(1 - |x - a|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad |x - a| < 1.$$